Int. J. Heat Mass Transfer. Vol. 14, pp. 1227–1231. Pergamon Press 1971. Printed in Great Britain

BOOK REVIEWS

Theorie der Übertragungsvorgänge. E. W. TOLUBINSKY. Naukowa Dumka (1969). 260S.

DAS ZU rezensierende Buch enthält grundlegende Angaben, die von dessem Verfasser auf dem Gebiet der allgemeinen Theorie der Übertragungsphänomene, wie phänomenologisch als auch statistisch, bestimmt waren.

Während die Entwicklung einer phänomenologischen Richtung zur Zeit vollendet ist, wird die statische Mechanik, deren Grundlagen in den klassischen Werke von Boltzmann liegen, dem Gründer des allbekannten H-Theorems und der Grundlagen der kinetischen Stofftheorie, und von Gibbs, der die Eigenschaften der Gleichgewichtsverteilungen formuliert hat, erst jetzt von solchen bedeutenden Forschern entwickelt wie z.B. Birkhoff, der einen viel strengeren Beweis der Ergodenhypothese gab; von Karlemann, der die Theorems der Existenz und Einzigkeit für inlineare kinetische Gleichungen untersucht hat; von Chapmann und Enskog, die eine Methode zur Lösung kinetischer Gleichungen entwickelt haben, die mit der Kleinparameter-Zerlegung verknüpft ist. In den Arbeiten des hervorragenden sowjetischen Gelehrten N. N. Bogolubow war auf Grund des von ihm formulierten dynamischen Prinzips ein viel allgemeineres Gleichungssystem für Verteilungsfunktionen einer beliebigen Ordnung eingeführt worden.

Um diese Ergebnisse zu erhalten, bedarf man nicht so der weiteren Entwicklung der bereits vorhandenen Methodik, wie das Heranziehen von neuen Ideen und Methoden beim Aufbau der Übertragungstheorie.

Die ausgezeichnete Monographie von E. W. Tolubinsky besitzt diese Striche und ist nach den Äusserungen von Akademiker N. N. Bogolubow eine Fundamentalforschung, die eine neue originelle Behandlung der Theorie der Übertragungsphänomene entwickelt hat und eine Reihe Ergebnisse von prinzipieller Bedeutung besitzt.

Der phänomenologischen Theorie ist das erste Kapitel des Buches gewidmet. Es wird von E. W. Tolubinsky unterstrichen, dass man im Rahmen der traditionellen phänomenologischen Theorie kaum wesentliche neue physikalische Ergebnisse erhalten kann. Deshalb sollen in der phänomenologischen Theorie vor allem neue mathematische Methoden zum Lösen bekannter Gleichungen entwickelt werden. Gerade eine solche Methode wird vom Autor dieser Monographie vorgelegt. Die Idee dieser Methode besteht darin, dass durch Gebrauch der Quellenfunktion aus einem Einzelimpuls, die am Gesamtraum analytisch und experimentell ermittelt war, und auf Grund des Superpositionsprinzips die Lösung einer grossen Klasse von instationären linearen Übertragungsaufgaben mit beliebigen Anfangs- und Grenzbedingungen gebaut werden kann, ohne sich an irgendwelche zusätzlichen Annahmen über den Charakter der Diffusions- und Wärmeleitungsvorgänge zu wenden. So kommt diese Aufgabe auf die Ermittlung der Green-Funktion G für das willkürliche Gebiet D. Zu deren Lösung legt der Autor die Reflexionsmethode vor. Es gelingt die unendliche Reflexionsreihe in die Integralgleichung zu falten. Betrachtet wurden alle Fälle linearer Grenzbedingungen, und, was insbesondere wertvoll ist, gezeigt war die Anwendbarkeit dieser Methode auf die Aufgaben mit beweglichen Grenzen.

Diese von E. W. Tolubinsky genannte Integralmethode gestattet instationäre Wärme- und Massenaustauschprobleme zu lösen, die durch beliebige lineare Differential- und Nichtdifferentialgleichungen umschrieben sind mit Einschluss der Lösung des gleichen Problems als Sonderfall auf Grund der Fourier-Hypothese, indem es dadurch viel breiter ist als die Methode, die auf die Lösung irgendwelcher Differentialgleichung gegründet ist.

Wir blieben nur kurz auf den durch Integralmethode erhaltenen Ergebnissen stehen und vor allem deshalb, weil allein E. W. Tolubinsky die Zukunft der Lehre über die Übertragung in der statistischen Theorie sah, was glänzend durch seine persönlichen Werke auf diesem Gebiet bestätigt war.

Die statistische Übertragungstheorie wird in den nachfolgenden Kapiteln des Buches entwickelt. Der linearen Theorie sind die Kapitel II–VII gewidmet. Gedacht wird eine Klasse von Übertragungsaufgaben, in denen wegen der verhältnismässig geringen Zahlendichte vernachlässigt werden kann Wechselwirkung zwischen den Objekten einer Art, und ihre Wechselwirkung mit den Objekten einer anderen physikalischen Natur führt zu verhältnismässig geringen Zustandsänderung der letzten. Zu solchen Aufgaben zählen, beispielweise, Neutronenaustausch mit Kernspaltung, Photonenzerstreuung-Strahlungsenergie in Sternatmosphären, Wärmeübertragung in Metallen u.s.w. Die in diesen Aufgaben an der Übertragung teilnehmenden Neutronen, Photonen und Elektronen stehen in Wechselwirkung mit den Atomen des Mediums, die viel "schwerere" Objekte sind, wobei die Zahl der ersten in willkürlich gewählter Zelle ω des μ-Raumes viel kleiner ist als die Partikelzahl der zweiten Art.

Eine Behandlung von linearen Übertragungsgleichungen beginnt vom Fall der Übertragung mit konstanter Geschwindigkeit (Kapitel II). Die Wärmeleitung oder Stoffdiffusion mit konstanter Geschwindigkeit wird als ein zufälliges Wandern mit der gleichen Stoffpartikeln-Geschwindigkeit oder Energieträger im Medium betrachtet, dessen Eigenschaften im einfachsten Fall durch die Funktionen $\mu(P,t)$ und $\phi(\vec{u},\vec{v},P,t)$ bestimmt sind, wobei $\mu(P,t)$ die Wahrscheinlichkeitsdichte der Partikelnwechselwirkung in der Zeit t im Punkt P mit einem Mediumelement ist. Dabei wird angenommen, dass die Weschselwirkung ohne Energieaustausch, d.h. die Einwirkung des Mediums, nur in der Veränderung der Richtung der Partikelnbewegung verläuft, während der Modul des Geschwindigkeitsvektors stets konstant bleibt.

$\phi(\vec{u},\vec{v},P,t)$ ist die Wahrscheinlichkeitsdichte der Veränderung infolge des Zusammenstosses im Punkt P im Moment t der Richtung der Partikelnbewegung mit $\vec{u}$ an $\vec{v}$. Mit solchen Überlegungen kommt E. W. Tolubinsky zur allgemeinen Übertragungs-Integral-Differentialgleichung (Gleichung II–I).

Als Folge erhielt E. W. Tolubinsky aus der Gleichung (II–I) wertvolle Ergebnisse bezüglich des Sinnes und der Gebrauchsverhältnisse der sogenannten hyperbolischen Übertragungsgleichung, die gewöhnlich zur phänomenologischen Umschreibung der Übertragungsvorgänge verwendet wird mit Rücksicht auf die Fortpflanzungs-Endgeschwindigkeit (§3 Kapitel II). Es erwies sich, dass die hyperbolische Übertragungsgleichung) gültig ist für einen eindimensionalen homogenen und stationären Raum mit höchst speziellen Eigenschaften. Dieses Ergebnis ist an und für sich wertvoll, und ausserdem bestätigt es nochmals den Gedanken von E. W. Tolubinsky, dass eine statistische Umschreibung der Übertragungsvorgänge zu wichtigen Ergebnissen auch für die phänomenologische Theorie führt.

Die Gleichung (II–I) wird vom Verfasser für den Fall der Übertragung im Medium mit viel komplizierteren Eigenschaften verallgemeinert, beispielweise, multiplizierender oder absorbierender Medien.

Ferner wird eine Verallgemeinerung der linearen Übertragungstheorie für den Fall angeführt, wo ein Partikel während der Wechselwirkung mit einem Medium nicht nur die Richtung, sondern auch den Geschwindigkeitswert wechselt. Ausserdem kann im Raum, in dem eine Übertragung stattfindet, irgendein Kraftfeld $K(P,t)$ vorhanden sein, das den Zuwachs des Geschwindigkeitsvektors $\Delta\vec{c}$ herbeiruft.

Es ist hervorzuheben, dass die ermittelte Integral-Differentialgleichung der Übertragung bei veränderlicher Streugeschwindigkeit und Dasein des Aussenkräftefeldes $\vec{K}$ sogar im Eindimensionalfall bei keinen Bedingungen auf die differential-hyperbolische Gleichung zurückführt.

Als weitere wichtige Entwicklung der Theorie ist der von E. W. Tolubinsky eingeführte Begriff der Übertragung in verallgemeinerten Feldern (Kapitel V). Unter einem verallgemeinerten Feld ist das Feld F zu verstehen, das sich aus einem Vektorfeld (Kraftfeld) und einer Endzahl von Skalarfeldern, wie determinierter als auch zufälliger, zusammensetzt. Als Beispiel, wo eine solche Theorieverallgemeinerung nötig ist, kann das Diffusionswandern von Kolloidteilchen dienen, an denen mit der Zeit eine "Stoff-Anhaftung" vorkommt.

Die Lösung von abgeleiteten viel allgemeineren linearen Übertragungsgleichungen ist von grosser mathematischer Schwierigkeit.

Deshalb war von E. W. Tolubinsky zum Lösen dieser allgemeinen Übertragungsgleichungen ein neues bemerkenswertes Verfahren, ein äusserst deutliches und anschauliches, nach seinem physikalischen Wesen entwickelt worden (Kapitel III). Der Kernpunkt dieser Methode besteht darin, dass die Teilchenevolution nach der Zahl der Wechselwirkungen mit den Streuzentren oder ähnlichen Teilchen für inlineare Übertragungsaufgaben verfolgt wird. Ausserdem, da üblich, um ein Gleichgewicht im System zu erreichen, eine geringe Zahl von Zusammenprallen jedes Teilchens genügt, so ist eine ganz schnelle Divergenz von Zerlegungen gesuchter Funktionen nach der Zahl der Zusammenstösse zu erwarten. Dies bedingt eine hohe Wirksamkeit dieser Methode.

Diese vom Verfasser genannte Umrechnungsmethode führt die Lösung von Übertragungsaufgaben auf die Berechnung eines gewissen Integrales zurück, der Art kontinual an allen möglichen Partikelnflugbahnen mit verschiedener Zahl von Wechselwirkungsakten. In der Monographie wird ein Algorithmus zur Berechnung solcher Integrale $\int \ldots \mathrm{d}p(L)$ gegeben, wo $p(L)$ die Wahrscheinlichkeit der vom Partikel durchgemachten Flugbahn L ist.

Die in der Monographie angeführte Ermittlung von Integralen über die Flugbahnen gestattet eine Reihe fortlaufender Annäherungen für die Funktion von Green einfacher dem physikalischen Sinne nach zu ermitteln.

Die Umrechnungsmethode gestattet auch Aufgaben des nichtmarkischen Wanderns von Partikeln zu lösen. Ihre Wirksamkeit beim Lösen viel allgemeinerer linearer Aufgaben ist vom Verfasser gezeigt am Studieren des Übertragungsproblemes mit veränderlicher Geschwindigkeit in Aussenfeldern, darunter auch für Felder, die von zufälligen Funktionen umschrieben werden, sowie für verschiedene geometrische Gebiete.

Im letzten (VIII) Kapitel des Buches sind Ergebnisse der fundamentalen Untersuchung dargelegt, die von E. W. Tolubinsky für die inlineare statistische Übertragungstheorie ausgeführt war, in Systemen, in denen die Wechselwirkung zwischen Partikeln wesentlich ist. Das Kapitel beginnt mit einer tiefen Analyse der Grundbegriffe und Methoden, die der statistischen Mechanik zugrunde liegen. Die Aufgabe liegt im Bau der Funktionen der Verteilung verschiedener Ordnungen. Zum Lösen des angegebenen Problems benutzt E. W. Tolubinsky die Idee seiner Umrechnungsmethode nach der Zusammenstosszahl, die sich beim Lösen von inlinearen Übertragungsproblemen als solch günstige zeigte. Zu diesem Zweck wird von ihm ein Basissystem von $F(\vec{r},\vec{v},t)$-Funktionen eingeführt, die einteilige Verteilungsfunktionen darstellen und durch n-willkürliche doppelte Zusammenstösse gebildet werden. In diesem Fall kann man, beispielweise, die einteilige Verteilungsfunktion als folgende Zerlegung schrieben

$$F(\vec{r},\vec{v},t) = \sum_{n=0}^{\infty} P_n(t)F_n(\vec{r},\vec{v}), \tag{1}$$

wobei $P_n(t)$ die relative Zahl von Systemen im statischen Ensemble ist, die F-Verteilungsfunktion besitzen. Der Autor führt ein Verfahren auf zur Berechnung von P_n durch F_n (Formel (VIII-5)). In der Monographie wird gezeigt, wie Rekurentformeln, die F_n durch F_{n-1} ausdrücken, aufgebaut werden können u.s.w.

Ferner fasst E. W. Tolubinsky seine Konstruktionen für den Fall der Verteilungsfunktion höchster Ordnungen zusammen. Für die Zweiteil-Verteilungsfunktionen wird, beispielweise, ähnlich (I) das Ergebnis

$$F(\vec{r}_1\vec{v}_1;\vec{r}_2\vec{v}_2;t) = \sum_{n=0}^{\infty} P_n(t)F_n(\vec{r}_1,\vec{v}_1,t)F_n(\vec{r}_2,\vec{v}_2,t). \tag{2}$$

So wird eine statistische Methode zum Auffinden von

Ein- und Mehrteil-Verteilungsfunktionen vorgeschlagen, und eingeführt wird ein Verhältnis zwischen statistischer und dynamischer Auffassungen in der Theorie der Übertragung.

Eines der letzten Ergebnisse von E. W. Tolubinsky besteht in der Entwicklung des $[S]_t$-Operators, vermittels dessen man der willkürlichen $\psi(\vec{r},\vec{v})$-Funktion aus einem gewissen Funktionalraum eine solche $\rho(t) = [S]_t\,\psi$-Dichte gegenüberstellen kann, dass $\rho(t)d\sigma$ die Wahrscheinlichkeit des aufgefundenen Systems im Zustand vorstellen wird, der durch die Einteil-Verteilungsfunktion von $\psi(\vec{r},\vec{v})$ gekennzeichnet wird, wobei $d\sigma$ ein Volumelement im Funktionalraum ist. Die Art des $[S]_t$-Operators ist von wesentlichem Interesse für die Forschung der zeitlichen Systemevolution sowie für das Studium der Eigenschaften stationärer Gleichgewichtsverteilungen.

Die Werke von E. W. Tolubinsky zählen zu den hervorragenden Errungenschaften auf einem der rein begrifflichen, schwierigen und wichtigen Gebiete der Physik. Deshalb ist kein Zweifel, dass die in der Monographie dargelegten Ergebnisse weite Verwendung finden werden.

Die lineare Theorie der Übertragung und insbesondere das Umrechnungverfahren werden zur Untersuchung der Übertragungsvorgänge in verdünnten Gasen verwendet.

Die tiefen Ideen, die Grundlagen der inlinearen Theorie der Übertragung schaffen, besitzen grosse Möglichkeiten zur Forschung von kondensierten Systemen (dichte Gase und Flüssigkeiten).

Bemerkenswert ist der Reichtum der Idee und der Ergebnisse der Monographie von E. W. Tolubinsky—geschweige solcher fundamentaler Ergebnisse, wie das Umrechnungsverfahren und der Berechnungsalgorithmus der dort entstandenen Integralen über die Flugbahnen; über die Grundlagen der inlinearen Theorie der Übertragung, die vom hervorragenden Talent ihres Verfassers zeugen. Viele wichtige Ergebnisse von E. W. Tolubinsky würden als ob nebenbei bestimmt. Es genügt zu erwähnen den unabhängigen Beweis der Ergodenhypothese, begründet auf der Beibringung der metrischen Transitivität, sowie die Formulierung der Anfangsbedingung in der Randaufgabe für die hyperbolische Übertragungsgleichung, die zur Erfüllung des Gesetzes der Erhaltung von übertragenden Substanzen nötig ist.

Wegen des begrenzten Umfanges dieser Rezension konnten mehrere Ergebnisse überhaupt nicht erwähnt werden.

Die ausgezeichnete Untersuchungen von E. W. Tolubinsky abschätzend, kann behauptet werden, dass das von ihm formulierte Programm zum Aufbau der Theorie der Übertragungsphänomene, die erhaltenen Ergebnisse und die von ihm prinzipiell neu entwickelten Verfahren ohne Zweifel als Grundlage für die Entwicklung einer neuen wissenschaftlichen Richtung in der statistischen Physik der Ungleichgewichtsvorgänge dienen werden.

T. L. PERELMAN

One-dimensional Two-phase Flow, GRAHAM B. WALLIS. McGraw-Hill, New York (1969).

SOMETIMES restrictions can be liberating. Resolve to put all distant projects out of mind, accomplish to-day's work to-day, and leave behind an empty desk; and on the morrow those deferred projects will be waiting for you, no longer as remote, unclear aspirations, but as attainable goals of the immediate future. Professor Wallis has performed just such a hygienic labour. Restricting himself religiously to *one*-dimensional flow of two-phase mixtures, and resolving to write all that is useful about them in the clearest possible way, he has made one question obvious: Now that's finished, what about *two*-dimensional flows? For he has done his job well: careful with his definitions, systematic and comprehensive in his organisation of material, copious and vivid in his choice of illustration, and forthright in dispensing advice, he has produced a book of substantial finality.

What then does prevent the launching of a large-scale attack on two-phase flows in two dimensions? Certainly not lack of practical importance; for the immense capital investment in equipment embodying two-phase pipe flow, and the difficulty of predicting its performance without massive experimentation, would justify the development of a theoretical design procedure, even at the cost of some hundreds of thousands of dollars. Is it then the mathematical difficulty of solving the differential equations that would be needed to describe the behaviour of a realistic mathematical model? Again, no; for there now exist standard computer programs for solving sets of simultaneous non-linear parabolic and hyperbolic differential equations; and these can certainly be adapted to the solution of the particular equations which are appropriate to two-phase mixtures.

A more serious obstacle to progress is the lack of quantitative knowledge of some important physical processes, for example the momentum interchange between the two coexistent phases. Yet many of these processes take place in one-dimensional flows also, and Professor Wallis has now catalogued them for other processes, it is possible at least to make plausible first guesses. So it seems that one could now write down the set of differential and algebraic equations which govern the velocities, concentrations and other properties of the mixture in two dimensions; and these equations could be solved with ease. Surely systematic comparison of the resulting solutions with available experimental data would enable the first guesses to be refined, and the necessary new hypotheses to be invented?

If economic, mathematical and physical obstacles are so easily removed, only psychological ones can still impede progress: the possibility of advance has been too murkily perceived, and its prospects of success too pessimisticly rated. Professor Wallis's book has cleared away much of the obscurity; it will be a valuable guide into new areas of research and application.

D. B. SPALDING

Diffusion and Heat Transfer in Chemical Kinetics, D. A. FRANK-KAMENETSKII.

EVERYONE who has studied heat or mass transfer for systems that involve chemical reactions knows Frank-Kamenetskii's classical monograph "Diffusion and Heat Exchange in Chemical Kinetics". Knowing also that it has become difficult to obtain copies of that work, they will welcome this translation of the newly prepared (1967) second edition. The viewpoint of the second edition is the same as that of the